



ROMÂNIA
MINISTERUL EDUCAȚIEI, CERCETĂRII ȘI INOVĂRII
INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN MUREȘ

Colegiul Național "Al. Papiu Ilarian"
Târgu Mureș, str. Bernácz György nr. 12
Tel.: 0265/250598 Fax: 0265/214498
Email: office@papiu.com
www.papiu.ro

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICA

"Al. Papiu Ilarian"

07.11.2009

EDITIA a XIV - a

CLASA a V - a

Subiectul I.

Se consideră numerele

$$a = (2 \cdot 2^4 \cdot 2^{95} + 3^{2^2} - 2^{2^{100}} : 4^{1000} + 19) \cdot (3^{99} + 2 \cdot 3^{99} + 2007^0) : (3^{100} + 1)$$

$$b = (2007 + 2 \cdot 2007 + 3 \cdot 2007 + \dots + 2006 \cdot 2007) : 1003$$

$$c = 4^n + 2^{2n+3} + 2^{2n+4}, n \in \mathbb{N}$$

Arătați că numerele a , b , c sunt pătrate perfecte.

Subiectul II.

Să se determine $n \in \mathbb{N}^*$ pentru ca numărul $S = 2009^1 + 2009^2 + \dots + 2009^n$ să fie:

- par
- divizibil cu 10.

Subiectul III.

Pentru un concurs de matematică au fost propuse 40 de probleme. Pentru o problemă corect rezolvată se acordă 5 puncte, iar pentru o problemă greșit rezolvată se scad 3 puncte din total puncte. Știm că un elev promovează la faza următoare dacă a rezolvat corect cel puțin 20 de probleme și a rezolvat greșit mai puțin de 5 probleme. Verificați dacă un elev care a rezolvat 38 de probleme și a obținut 102 puncte a promovat pentru faza următoare.

Subiectul IV.

Se consideră numărul $n = \overline{ab} + \overline{ba} - (a + b)$.

- Arătați că n este divizibil cu 10.
- Să se determine n astfel încât la împărțirea cu 9 să dea restul 8.

**Toate subiectele sunt obligatorii. Pentru fiecare problemă se acordă 7 puncte.
Timp efectiv de lucru 3 ore.**

Probleme selectate și propuse de: Gînta Vasile, Sebestyén Mária, Lobonț Dorin, Bálint Attila



ROMÂNIA
MINISTERUL EDUCAȚIEI, CERCETĂRII ȘI INOVĂRII
INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN MUREȘ

Colegiul Național "Al. Papiu Ilarian"
Târgu Mureș, str. Bernácz György nr. 12
Tel.: 0265/250598 Fax: 0265/214498
Email: office@papiu.com
www.papiu.ro

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICA
"Al. Papiu Ilarian"
07.11.2009
EDITIA a XIV - a

V. osztály

I. Tétel

Adottak a következő számok:

$$a = (2 \cdot 2^4 \cdot 2^{95} + 3^{2^2} - 2^{2^{100}} : 4^{1000} + 19) \cdot (3^{99} + 2 \cdot 3^{99} + 2007^0) : (3^{100} + 1)$$

$$b = (2007 + 2 \cdot 2007 + 3 \cdot 2007 + \dots + 2006 \cdot 2007) : 1003$$

$$c = 4^n + 2^{2n+3} + 2^{2n+4}, n \in \mathbb{N}$$

Mutassuk ki, hogy a , b , c teljes négyzetek.

II. Tétel

Határozzuk meg az $n \in \mathbb{N}^*$ értékét, melyre $S = 2009^1 + 2009^2 + \dots + 2009^n$ szám

- páros
- osztható 10-el.

III. Tétel

Egy matematikai versenyen 40 feladatot tűztek ki. Egy helyesen megoldott feladatért 5 pont jár, egy rosszul megoldott feladatért 3 pontot levonnak az összpontszámból. Egy tanuló akkor jut el a következő fordulóba, ha helyesen megold legalább 20 feladatot és 5-nél kevesebbet hibásan. Ellenőrizzük, hogy ha egy tanuló 38 feladatot oldott meg és 102 pontot ért el, akkor tovább jutott a következő fordulóba.

IV. Tétel

Legyen az $n = \overline{ab} + \overline{ba} - (a + b)$ szám.

- Mutassuk ki, hogy n osztható 10-el.
- Határozzuk meg az n azon értékét, melyet 9-el osztva a maradék 8.

**Minden tétel kötelező. Minden feladat 7 pontot ér.
Munkaidő 3 óra.**

A feladatokat válogatta és javasolta: Gînța Vasile, Sebestyén Mária, Lobonț Dorin, Bálint Attila



ROMÂNIA
MINISTERUL EDUCAȚIEI, CERCETĂRII ȘI INOVĂRII
INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN MUREȘ

Colegiul Național "Al. Papiu Ilarian"
Târgu Mureș, str. Bernácz György nr. 12
Tel.: 0265/250598 Fax: 0265/214498
Email: office@papiu.com
www.papiu.ro

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICA

"Al. Papiu Ilarian"

07.11.2009

EDITIA a XIV - a

CLASA a VI - a

Subiectul I.

- a) Să se arate că numărul $n = 1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 \cdot 3 + \dots + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 2009$ nu este pătrat perfect.
b) Să se arate că oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$, $a = 72^{n+1} + 3^{2n+1} \cdot 2^{3n+2} + 3^{2n} \cdot 2^{3n} \cdot 6$ este divizibil cu 15.

Subiectul II.

- a) Aflați numerele naturale n pentru care fracția $\frac{3n+5}{2n+7}$ este reductibilă.
b) Calculați suma primelor 2009 de numere n astfel obținute.

Subiectul III.

Pe segmentul (AB) se consideră punctele $M_1, M_2, M_3, \dots, M_{2009}$ astfel încât:

$$AM_1 = \frac{AB}{2}, AM_2 = \frac{AM_1}{2}, AM_3 = \frac{AM_2}{2}, \dots, AM_{2009} = \frac{AM_{2008}}{2}.$$

Dacă lungimea segmentului $AB = 2^{2009}$ atunci:

- a) Aflați lungimea segmentului AM_6 ;
b) Arătați că suma $S = AM_1 + AM_2 + AM_3 + \dots + AM_{2009}$ este număr impar.

Subiectul IV.

Fie unghiurile adiacente AOB și BOC . Bisectoarea unghiului AOB formează cu semidreapta (OC) un unghi congruent cu suplimentul unghiului AOB , iar bisectoarea unghiului BOC formează cu semidreapta (OA) un unghi congruent cu complementul unghiului BOC . Determinați măsura unghiului AOC .

**Toate subiectele sunt obligatorii. Pentru fiecare problemă se acordă 7 puncte.
Timp efectiv de lucru 3 ore.**

Probleme selectate și propuse de: Gînta Vasile, Sebestyén Mária, Lobonț Dorin, Bálint Attila



ROMÂNIA
MINISTERUL EDUCAȚIEI, CERCETĂRII ȘI INOVĂRII
INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN MUREȘ

Colegiul Național "Al. Papiu Ilarian"
Târgu Mureș, str. Bernácz György nr. 12
Tel.: 0265/250598 Fax: 0265/214498
Email: office@papiu.com
www.papiu.ro

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICA
"Al. Papiu Ilarian"
07.11.2009
EDITIA a XIV - a

VI. osztály

I. Tétel

- a) Mutassuk ki, hogy az $n = 1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 \cdot 3 + \dots + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 2009$ szám nem teljes négyzet.
b) Mutassuk ki, hogy bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén $a = 72^{n+1} + 3^{2n+1} \cdot 2^{3n+2} + 3^{2n} \cdot 2^{3n} \cdot 6$ osztható 15-el.

II. Tétel

- a) Határozzuk meg azon n természetes számokat, melyekre $\frac{3n+5}{2n+7}$ tört reducibilis.
b) Számítsuk ki az így kapott első 2009 darab n szám összegét.

III. Tétel

Legyenek $M_1, M_2, M_3, \dots, M_{2009}$ pontok az (AB) szakaszon, úgy, hogy:

$$AM_1 = \frac{AB}{2}, AM_2 = \frac{AM_1}{2}, AM_3 = \frac{AM_2}{2}, \dots, AM_{2009} = \frac{AM_{2008}}{2}.$$

Ha $AB = 2^{2009}$, akkor:

- a) határozzuk meg az AM_6 szakasz hosszát.
b) mutassuk ki, hogy az $S = AM_1 + AM_2 + AM_3 + \dots + AM_{2009}$ összeg páratlan szám.

IV. Tétel

Legyenek AOB és BOC egymás melletti szögek. Az AOB szög szögfelezője az (OC) félegyenessel az AOB szög kiegészítő szögével kongruens szöget alkot, valamint a BOC szög szögfelezője az (OA) félegyenessel a BOC szög pótszögével kongruens szöget alkot. Határozzuk meg az AOC szög mértékét.

**Minden tétel kötelező. Minden feladat 7 pontot ér.
Munkaidő 3 óra.**

A feladatokat válogatta és javasolta: Gînta Vasile, Sebestyén Mária, Lobonț Dorin, Bálint Attila



ROMÂNIA
MINISTERUL EDUCAȚIEI, CERCETĂRII ȘI INOVĂRII
INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN MUREȘ

Colegiul Național "Al. Papiu-Ilarian"
Târgu Mureș, str. Bernácz György nr. 12
Tel.: 0265/250598 Fax: 0265/214498
Email: office@papiu.com
www.papiu.ro

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICA

"Al. Papiu Ilarian"

07.11.2009

EDITIA a XIV - a

CLASA a VII - a

Subiectul I.

- a) Fie $x = \left(1 + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \dots + \frac{1}{1+2+3+\dots+2010}\right)^n \cdot \frac{2011^n}{2^n}$, $n \in \mathbb{N}$. Determinați n astfel încât x să aibă 256 de divizori.
- b) Scrieți numărul 2009^{2009} ca suma de două pătrate perfecte.

Subiectul II.

- a) Dacă $7^{2x} = 41^y = 2009$, aflați valoarea expresiei $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$, unde $x, y \in \mathbb{R}^*$.
- b) Determinați numerele naturale n pentru care $n+1, n+3, n+7, n+9, n+15$ sunt toate numere prime.

Subiectul III.

Se consideră triunghiul ABC , $[AB] \equiv [AC]$, $M \in (BC)$, P și Q simetricele lui M față de AB respectiv AC . Demonstrați că :

- triunghiul APQ este isoscel;
- $MP + MQ$ este constantă, $(\forall) M \in (BC)$;
- $AM \perp BC'$, unde $AB \cap MQ = \{B'\}$ și $AC \cap MP = \{C'\}$.

Subiectul IV.

Fie patrulaterul convex $ABCD$, $AB \parallel CD$, M este mijlocul lui $[AD]$, N este mijlocul lui $[BC]$, $AC \cap BD = \{O\}$ și $O \in MN$.

- Arătați că $ABCD$ este paralelogram.
- Dacă R este mijlocul lui $[AB]$ și Q simetricul punctului C față de R , demonstrați că punctele D, A și Q sunt colineare.
- Dacă $P \in (OC)$ și $[PM] \equiv [PR]$, demonstrați că $ABCD$ este romb.

Toate subiectele sunt obligatorii. Pentru fiecare problemă se acordă 7 puncte.

Timp efectiv de lucru 3 ore.

Probleme selectate și propuse de: Gînta Vasile, Sebestyén Mária, Lobonț Dorin, Bálint Attila



ROMÂNIA
MINISTERUL EDUCAȚIEI, CERCETĂRII ȘI INOVĂRII
INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN MUREȘ

Colegiul Național "Al. Papiu Ilarian"
Târgu Mureș, str. Bernácz György nr. 12
Tel.: 0265/250598 Fax: 0265/214498
Email: office@papiu.com
www.papiu.ro

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICA
"Al. Papiu Ilarian"
07.11.2009
EDITIA a XIV - a

VII. osztály

I. Tétel

- a) Legyen $x = \left(1 + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \dots + \frac{1}{1+2+3+\dots+2010}\right)^n \cdot \frac{2011^n}{2^n}$, $n \in \mathbb{N}$. Határozzuk meg az n azon értékét, melyre x -nek 256 osztója van.
- b) Írjuk fel a 2009^{2009} számot két teljes négyzet összegéent.

II. Tétel

- a) Ha $7^{2x} = 41^y = 2009$, határozzuk meg az $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ kifejezés értékét, ahol $x, y \in \mathbb{R}^*$.
- b) Határozzuk meg azon n természetes számokat, melyekre $n+1, n+3, n+7, n+9, n+15$ mind prímszámok.

III. Tétel

Legyen az ABC_{Δ} -ben $[AB] \equiv [AC]$, $M \in (BC)$, P és Q az M pont szimmetrikusai az AB , illetve AC egyenesekre nézve. Bizonyítsuk be, hogy :

- a) APQ háromszög egyenlő szárú;
b) $MP + MQ$ állandó, $(\forall) M \in (BC)$;
c) $AM \perp BC'$, ahol $AB \cap MQ = \{B'\}$ és $AC \cap MP = \{C'\}$.

IV. Tétel

Az $ABCD$ konvex négyszögben $AB \parallel CD$, M az $[AD]$ és N a $[BC]$ felezőpontja, $AC \cap BD = \{O\}$ és $O \in MN$.

- a). Mutassuk ki, hogy $ABCD$ paralelogramma.
b). Ha R az $[AB]$ felezőpontja és Q a C pont szimmetrikusa az R pontra nézve, bizonyítsuk be, hogy D, A és Q pontok kollineárisak.
c). Ha $P \in (OC)$ és $[PM] \equiv [PR]$, igazoljuk, hogy $ABCD$ rombusz

Minden tétel kötelező. Minden feladat 7 pontot ér.

Munkaidő 3 óra.

A feladatokat válogatta és javasolta: Gînta Vasile, Sebestyén Mária, Lobonț Dorin, Bálint Attila



ROMÂNIA
MINISTERUL EDUCAȚIEI, CERCETĂRII ȘI INOVĂRII
INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN MUREȘ

Colegiul Național "Al. Papiu Ilarian"
Târgu Mureș, str. Bernácz György nr. 12
Tel.: 0265/250598 Fax: 0265/214498
Email: office@papiu.com
www.papiu.ro

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICA

"Al. Papiu Ilarian"

07.11.2009

EDITIA a XIV - a

CLASA a VIII - a

Subiectul I.

- a) Dacă $7^{2x} = 41^y = 2009$, aflați valoarea expresiei $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$, unde $x, y \in \mathbb{R}^*$.
- b) Scrieți numărul 2009^{2009} ca suma de două patrate perfecte.

Subiectul II.

- a) Determinați $x, y, z \in \mathbb{R}$ astfel încât $3x^2 + 5y^2 + 2z^2 + 12x + 10y - 4z + 19 = 0$.
- b) Arătați că $2 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{\sqrt{6}}{5} + \frac{\sqrt{12}}{7} + \frac{\sqrt{20}}{9} + \dots + \frac{\sqrt{4002000}}{4001} \right) < 2000$

Subiectul III.

Se consideră triunghiul ABC cu $m(\hat{A}) = 90^\circ$ și $m(\hat{C}) = 30^\circ$. Fie $D \in (BC)$, $P \in (AB)$, astfel încât $\frac{BD}{DC} = \frac{1}{3}$, $\frac{AP}{PB} = \frac{3}{2}$ și E piciorul bisectoarei unghiului B . Să se arate că CP , AD , BE sunt concurente.

GM-2009, Marian Teler, Costesti, Arges

Subiectul IV.

Fie punctul $M \notin (ABC)$ astfel încât $d(B, A) = d(M, A) = d(M, B) = d(M, C) = a$. Știind că $m(\hat{BAC}) = 90^\circ$, $m(\hat{ABC}) = 30^\circ$,

a) Să se calculeze perimetrul triunghiului ABC .

b) Să se determine $d(M, (ABC))$.

c) Să se arate că, dacă $OP \parallel AC$, $P \in AB$, atunci $AB \perp (MOP)$.

d) Să se arate că G_1, G_2, N și P sunt coplanare, unde N este mijlocul segmentului $[AC]$, iar G_1 și G_2 sunt centrele de greutate ale triunghiurilor AMB , respectiv AMC .

**Toate subiectele sunt obligatorii. Pentru fiecare problemă se acordă 7 puncte.
Timp efectiv de lucru 3 ore.**

Probleme selectate și propuse de: Gînta Vasile, Sebestyén Mária, Lobonț Dorin, Bálint Attila



ROMÂNIA
MINISTERUL EDUCAȚIEI, CERCETĂRII ȘI INOVĂRII
INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN MUREȘ

Colegiul Național "Al. Papiu Ilarian"
Târgu Mureș, str. Bernády György nr. 12
Tel.: 0265/250598 Fax: 0265/214498
Email: office@papiu.com
www.papiu.ro

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICA
"Al. Papiu Ilarian"
07.11.2009
EDITIA a XIV - a

VIII. osztály

I. Tétel

- a) Ha $7^{2x} = 41^y = 2009$, határozzuk meg az $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ kifejezés értékét, ahol $x, y \in \mathbb{R}^*$.
b) Írjuk fel a 2009^{2009} számot két teljes négyzet összegéent.

II. Tétel

- a) Határozzuk meg az $x, y, z \in \mathbb{R}$ számokat, ha $3x^2 + 5y^2 + 2z^2 + 12x + 10y - 4z + 19 = 0$.
b) Mutassuk ki, hogy $2 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{\sqrt{6}}{5} + \frac{\sqrt{12}}{7} + \frac{\sqrt{20}}{9} + \dots + \frac{\sqrt{4002000}}{4001} \right) < 2000$

III. Tétel

Az ABC háromszögben $m(\hat{A}) = 90^\circ$ és $m(\hat{C}) = 30^\circ$. Legyen $D \in (BC)$, $P \in (AB)$ úgy, hogy

$\frac{BD}{DC} = \frac{1}{3}$, $\frac{AP}{PB} = \frac{3}{2}$ és E a \hat{B} szögfelezőjének talppontja. Mutassuk ki, hogy CP , AD , BE konkurens egyenesek.

GM-2009, Marian Teler, Costesti, Arges

IV. Tétel

Legyen $M \notin (ABC)$ úgy, hogy $d(B, A) = d(M, A) = d(M, B) = d(M, C) = a$. Tudva, hogy

$m(\hat{BAC}) = 90^\circ$, $m(\hat{ABC}) = 30^\circ$,

- a) Számítsuk ki az ABC háromszög területét.
b) Határozzuk meg $d(M, (ABC))$.
c) Ha $OP \parallel AC$, $P \in AB$, mutassuk ki, hogy $AB \perp (MOP)$.
d) Ha N az $[AC]$ felezőpontja, valamint G_1 és G_2 az AMB , illetve AMC háromszögek súlypontjai, mutassuk ki, hogy G_1 , G_2 , N és P koplánárisak.

Minden tétel kötelező. Minden feladat 7 pontot ér.

Munkaidő 3 óra.

A feladatokat válogatta és javasolta: Gînta Vasile, Sebestyén Mária, Lobonț Dorin, Bálint Attila

Concursul interjudețean de matematică ”Alexandru Papiu Ilarian”
Ediția a XIV-a, Târgu-Mureș, 2009

Clasa a IX-a

Problema 1

a) Să se determine primele zece numere naturale care sunt multiplii de 2 sau 5 dar nu sunt multiplii de trei.

b) Să se rezolve ecuația

$$\left[\frac{x}{2}\right] + \left[\frac{x}{5}\right] + \left[\frac{x}{30}\right] = 10 + \left[\frac{x}{6}\right] + \left[\frac{x}{10}\right] + \left[\frac{x}{15}\right], \quad x \in \mathbb{N}.$$

Problema 2 Cercul înscris în triunghiul ABC este tangent laturilor BC , CA , AB în A' , B' , C' . Să se arate că

$$\sqrt{AB' + AC'} + \sqrt{BC' + BA'} + \sqrt{CA' + CB'} \leq \sqrt{BC} + \sqrt{CA} + \sqrt{AB}.$$

Problema 3 Se consideră șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ definit prin relația de recurență:

$$x_{n+1} = 3x_n + \sqrt{8x_n^2 + 1}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad x_0 = 0.$$

a) Să se arate că toți termenii șirului sunt numere naturale.

b) Să se determine numerele naturale n pentru care x_{n+1} se divide cu 6.

Problema 4 Fie $M = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ mulțimea vârfurilor unui poligon regulat.

a) Să se determine numărul triunghiurilor isoscele care se pot forma cu vârfuri din M .

b) Să se determine numărul minim de vârfuri care trebuie eliminate din mulțimea M astfel ca să nu se poată forma triunghiuri echilaterale cu vârfurile rămase.

Concursul interjudețean de matematică "Alexandru Papiu Ilarian"
Ediția a XIV-a, Târgu-Mureș, 2009

Clasa a X-a

Problema 1 Fie O, A, B, C patru puncte în plan astfel ca distanțele dintre oricare două să fie numere raționale. Să se arate că există numere raționale a, b, c astfel ca

$$a \cdot \overline{OA} + b \cdot \overline{OB} + c \cdot \overline{OC} = \overline{0}.$$

Problema 2 Fie a, b, c, x, y, z numere pozitive care verifică relațiile:

$$a = cy + bz, \quad b = az + cx, \quad c = bx + ay.$$

Să se arate că $1 \leq x + y + z \leq \frac{3}{2}$.

Problema 3 Să se arate că numerele reale distincte a_1, a_2, \dots, a_n sunt în progresie aritmetică dacă și numai dacă mulțimea $D = \{a_i - a_j \mid i, j = \overline{1, n}\}$ are $2n - 1$ elemente.

Problema 4 Fie m, n numere naturale și $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ o mulțime de numere întregi. Să se arate că:

a) Dacă $1 \leq m \leq n$ atunci există indici distincți $i_1, i_2, \dots, i_k \in \{1, 2, \dots, n\}$ astfel ca suma $a_{i_1} + a_{i_2} + \dots + a_{i_k}$ să se dividă cu m .

b) Dacă $n < m < 2^n$ atunci există indici distincți $i_1, i_2, \dots, i_k \in \{1, 2, \dots, n\}$ și o alegere a semnelor $+$ și $-$ astfel ca numărul $\pm a_{i_1} \pm a_{i_2} \pm \dots \pm a_{i_k}$ să fie divizibil cu m .

Concursul interjudețean de matematică ”Alexandru Papiu Ilarian”
Ediția a XIV-a, Târgu-Mureș, 2009

Clasa a XI-a

Problema 3 Să se determine numărul elementelor mulțimii:

$$A = \{(a_1, a_2, \dots, a_{10}) \mid 1 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_{10} \leq 101 \text{ și } a_{i+1} - a_i \geq 10, i = \overline{1, 9}\}.$$

Problema 2 Fie a, b numere reale pozitive. Definim șirul $(x_n)_n$ prin relația de recurență

$$x_{n+1} = (a + b)x_n - abx_{n-1}, \quad n \geq 1, \text{ cu } x_0 = 1 \text{ și } x_1 \in \mathbb{R} \setminus \{a, b\}.$$

Să se arate că șirul $(x_n)_n$ conține o progresie aritmetică infinită dacă și numai dacă $a = b = 1$.

Problema 3 Să se arate că singura permutare σ a mulțimii $\{1, 2, \dots, n\}$ care are proprietatea $1 + \sigma(1) < 2 + \sigma(2) < \dots < n + \sigma(n)$ este permutarea identică.

Problema 4 Fie P un polinom de grad $n \geq 2$ cu proprietatea

$$P(k) = k \cdot 2^{k-1}, \text{ pentru orice } k \in \{0, 1, \dots, n\}.$$

a) Să se arate că:

$$C_k^1 + 2C_k^2 + \dots + kC_k^k = k \cdot 2^{k-1}.$$

b) Să se determine $P(n + 1)$.

Concursul interjudețean de matematică "Alexandru Papiu Ilarian"
Ediția a XIV-a, Târgu-Mureș, 2009

Clasa a XII-a

Problema 1 Pentru $a \in \mathbb{R}$ considerăm matricea $X_a = \begin{bmatrix} a & 1 \\ -1 & a \end{bmatrix}$ și notăm

$$(X_a)^n = \begin{bmatrix} a_n & b_n \\ -b_n & a_n \end{bmatrix}, \quad n \geq 1.$$

Să se arate că există $a \in \mathbb{R}$ pentru care $b_1 < a_1, b_2 < a_2, \dots, b_{2009} < a_{2009}$ și $b_{2010} > a_{2010}$.

Problema 2 Fie $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție și $(a_n)_n$ un șir de numere reale care verifică relația de recurență $a_{n+1} = f(a_n, a_{n-1}), \forall n \geq 1$. Să se arate că dacă mulțimea

$$A = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

este finită atunci există două polinoame $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ și există

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n) = \frac{P(x)}{Q(x)}, \quad \forall x \in (-1, 1).$$

Problema 3 Se consideră funcțiile $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, derivabilă și $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de două ori derivabilă cu proprietățile:

$$f'(x) - 2f(x) \geq 0, \quad \forall x \geq 0, \quad f(0) = 1,$$

$$g''(x) - 3g'(x) + 2g(x) \geq 0, \quad \forall x \geq 0, \quad g(0) = 0, \quad g'(0) = 1.$$

Să se arate că:

- $f(x) \geq e^{2x}, \forall x \geq 0;$
- $g(x) \geq e^{2x} - e^x, \forall x \geq 0.$

Problema 4 Fie A o matrice de ordin $2n, n \geq 1$ cu elementele numere naturale și cu proprietatea:

(P): pentru orice două linii L_i, L_j cu $i \neq j$, suma lor $L_i + L_j$ conține n elemente numere pare și n elemente numere impare.

a) Să se arate că pentru orice două coloane C_i și C_j cu $i \neq j$, suma lor $C_i + C_j$ conține n elemente numere pare și n elemente numere impare.

b) Să se arate că pentru orice $k \geq 1$ există matrice de ordin 2^k cu proprietatea (P).

Concurs interjudețean de matematică „Alexandru Papiu Ilarian” Ediția a XIV-a, Târgu-Mureș, 2009

IX. osztály

1 Feladat

a) Határozd meg az első tíz természetes számot, amely 2-nek vagy 5-nek többszöröse, de nem többszöröse háromnak.

b) Oldd meg az egyenletet

$$\left[\frac{x}{2} \right] + \left[\frac{x}{5} \right] + \left[\frac{x}{30} \right] = 10 + \left[\frac{x}{6} \right] + \left[\frac{x}{10} \right] + \left[\frac{x}{15} \right], \quad x \in \mathbb{N}$$

2 Feladat

Az ABC háromszögbe írt kör a BC, CA és AB oldalakat rendre A', B', C' pontokban érinti. Igazold, hogy

$$\sqrt{AB' + AC'} + \sqrt{BC' + BA'} + \sqrt{CA' + CB'} \leq \sqrt{BC} + \sqrt{CA} + \sqrt{AB}$$

3 Feladat

Adott az $(x_n)_{n \geq 0}$ sorozat, melyet a következő rekurzív képlettel értelmezzünk

$$x_{n+1} = 3 \cdot x_n + \sqrt{8 \cdot x_n^2 + 1}, \quad n \in \mathbb{N}, x_0 = 0$$

a) Igazold, hogy a sorozat minden tagja természetes szám.

b) Határozd meg azon n természetes számokat, melyekre x_{n+1} osztható 6 al.

4 Feladat

Legyen $M = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ egy szabályos sokszög csúcspontjainak halmaza.

a) Határozd meg azon egyenlő szárú háromszögek számát melyeket az M halmaz pontjaiból alkothatunk.

b) Határozzuk meg azt a minimális számú csúcspontot, amelyet kivéve az M halmazból, a megmaradt csúcspontokkal nem alkothatunk egyenlő oldalú háromszögeket.

**Concursul interjudețean de matematică “Alexandru Papiu Ilarian”
Ediția a XIV-a, Târgu-Mureș, 2009**

X. osztály

- 1. Feladat:** Tekintsünk négy O, A, B, C pontot a síkban úgy, hogy bármelyik kettő közötti távolság racionális szám legyen. Igazoljátok, hogy léteznek olyan a, b, c racionális számok, amelyekre

$$a \cdot \overline{OA} + b \cdot \overline{OB} + c \cdot \overline{OC} = \overline{0}.$$

- 2. Feladat:** Legyenek a, b, c, x, y, z olyan pozitív számok, amelyek teljesítik a következő feltételeket:

$$a = cy + bz, b = az + cx, c = bx + ay.$$

Igazoljátok, hogy $1 \leq x + y + z \leq \frac{3}{2}$.

- 3. Feladat:** Igazoljátok, hogy az egymástól különböző a_1, a_2, \dots, a_n valós számok akkor és csak akkor vannak számtani haladványban, ha a $D = \{a_i - a_j \mid i, j = \overline{1, n}\}$ halmaznak $2n - 1$ eleme van.

- 4. Feladat:** Tekintsük az m, n természetes számokat, valamint az $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ egész számokból álló halmazt. Igazoljátok, hogy:

- a) Ha $1 \leq m \leq n$, akkor léteznek az egymástól különböző $i_1, i_2, \dots, i_k \in \{1, 2, \dots, n\}$ indexek úgy, hogy az $a_{i_1} + a_{i_2} + \dots + a_{i_k}$ összeg osztható legyen az m számmal.
- b) Ha $n < m < 2^n$, akkor léteznek az egymástól különböző $i_1, i_2, \dots, i_k \in \{1, 2, \dots, n\}$ indexek és a $+$, valamint $-$ jelek olyan megválasztása, amelyre a $\pm a_{i_1} \pm a_{i_2} \pm \dots \pm a_{i_k}$ szám legyen osztható az m számmal.

Concursul interjudețean de matematica „Alexandru Papiu Ilarian”

Ediția XIV-a, Târgu Mureș, 2009

Clasa a XI-a

1. **FELADAT:** Határozd meg a következő halmaz elemeinek számát

$$A = \{(a_1, a_2, \dots, a_{10}) \mid 1 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_{10} \leq 101 \text{ és } a_{i+1} - a_i \geq 10, i = 1, 2, \dots, 9\}$$

2. **FELADAT:** Adottak az a és a b pozitív valós számok. Értelmezzük az (x_n) sorozatot, amelyre $x_{n+1} = (a + b)x_n - abx_{n-1}$, $n \geq 1$, $x_0 = 1$ és $x_1 \in \mathbb{R} \setminus \{a, b\}$. Igazold, hogy az (x_n) sorozat akkor és csak akkor tartalmaz egy végtelen számtani haladványt, ha $a = b = 1$.
3. **FELADAT:** Igazold, hogy az $\{1, 2, \dots, n\}$ halmaz egy σ permutációjára igaz, hogy

$$1 + \sigma(1) < 2 + \sigma(2) < \dots < n + \sigma(n)$$

akkor a σ az identikus permutáció!

4. **FELADAT:** Adott a P polinom, amelynek fokszáma $n \geq 2$, és amelyre $P(k) = k \cdot 2^{k-1}$, bármely $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ esetén.
- a.) Igazold, hogy $C_k^1 + 2 \cdot C_k^2 + \dots + k \cdot C_k^k = k \cdot 2^{k-1}$
- b.) Határozd meg a $P(n + 1)$ értéket.

Concursul interjudețean de matematică ” Alexandru Papiu Ilarian” Ediția a XIV-a, Târgu-Mureș, 2009

Clasa a XII-a

1. Feladat

Egy $a \in \mathbf{R}$ esetén tekintsük az $X_a = \begin{bmatrix} a & 1 \\ -1 & a \end{bmatrix}$ mátrixot, jelöljük $(X_a)^n = \begin{bmatrix} a_n & b_n \\ -b_n & a_n \end{bmatrix}$.

Mutassuk ki, hogy létezik $a \in \mathbf{R}$, amelyre $b_1 < a_1$, $b_2 < a_2, \dots, b_{2009} < a_{2009}$ és $b_{2010} > a_{2010}$.

2. Feladat

Legyen $f : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ egy függvény és $(a_n)_n$ egy valós számsorozat, amely teljesíti az $a_{n+1} = f(a_n, a_{n-1})$, $\forall n \geq 1$ rekurziós összefüggést.

Mutassuk ki, hogy ha az $A = \{a_n \mid n \in \mathbf{N}\}$ halmaz véges, akkor létezik két $P, Q \in \mathbf{R}[X]$ polinom

és létezik a $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, $\forall x \in (-1, 1)$.

3. Feladat

Tekintsük az $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ deriválható és a $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ kétszer deriválható függvényeket, amelyekre teljesülnek

$$f'(x) - 2f(x) \geq 0, \quad \forall x \geq 0, \quad f(0) = 1,$$

$$g''(x) - 3g'(x) + 2g(x) \geq 0, \quad \forall x \geq 0, \quad g(0) = 0, \quad g'(0) = 1, \text{ tulajdonságok.}$$

Mutassuk ki, hogy:

a) $f(x) \geq e^{2x}$, $\forall x \geq 0$;

b) $g(x) \geq e^{2x} - e^x$, $\forall x \geq 0$.

4. Feladat

Legyen A egy $2n$ -edrendű, $n \geq 1$ mátrix, amelynek elemei természetes számok és amely teljesíti a következő tulajdonságot:

(P): Bármely két L_i, L_j , $i \neq j$ sorok esetében az $L_i + L_j$ összeg n páros és n páratlan elemet tartalmaz.

a) Mutassuk ki, hogy bármely két C_i és C_j , $i \neq j$ oszlopok esetén a $C_i + C_j$ összeg n páros és n páratlan elemet tartalmaz.

b) Mutassuk ki, hogy bármely $k \geq 1$ esetén létezik 2^k -rendű mátrix, amelyre teljesül a (P) tulajdonság.

