

Concursul interjudețean de matematică ”Alexandru Papiu Ilarian”  
Ediția a XIV-a, Târgu-Mureș, 2009

**Clasa a IX-a**

Cercul înscris în triunghiul  $ABC$  este tangent laturilor  $BC, CA, AB$  în  $A', B', C'$ . Să se arate că

$$\sqrt{AB' + AC'} + \sqrt{BC' + BA'} + \sqrt{CA' + CB'} \leq \sqrt{BC} + \sqrt{CA} + \sqrt{AB}.$$

Vasile Pop

**Soluție.** Notăm cu  $x, y, z$  lungimile tangentelor de la  $A, B, C$  la cercul înscris. Avem de arătat că

$$\begin{aligned} \sqrt{2x} + \sqrt{2y} + \sqrt{2z} &\leq \sqrt{y+z} + \sqrt{z+x} + \sqrt{x+y} \Leftrightarrow \\ 2(\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}) &\leq \sqrt{2(y+z)} + \sqrt{2(z+x)} + \sqrt{2(x+y)}. \end{aligned}$$

Dar

$$\begin{aligned} \sqrt{2(y+z)} &\geq \sqrt{y} + \sqrt{z} \\ (\Leftrightarrow 2(y+z) &\geq y+z+2\sqrt{yz} \Leftrightarrow y+z \geq 2\sqrt{yz} \Leftrightarrow \frac{y+z}{2} \geq \sqrt{yz}). \end{aligned}$$

Analog  $\sqrt{2(z+x)} \geq \sqrt{z} + \sqrt{x}$  și  $\sqrt{2(x,y)} \geq \sqrt{x} + \sqrt{y}$ , care adunate dau inegalitatea cerută.

## Clasa a IX-a

Se consideră șirul  $(x_n)_{n \geq 0}$  definit prin relația de recurență:

$$x_{n+1} = 3x_n + \sqrt{8x_n^2 + 1}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad x_0 = 0.$$

- Să se arate că toți termenii șirului sunt numere naturale.
- Să se determine numerele naturale  $n$  pentru care  $x_{n+1}$  se divide cu 6.

Vasile Pop

**Soluție.** Din relația  $x_{n+1} - 3x_n = \sqrt{8x_n^2 + 1}$  rezultă:

$$P(n) : \quad x_{n+1}^2 - 6x_{n+1}x_n + x_n^2 = 1, \quad n \geq 0$$

$$P(n-1) : \quad x_n^2 - 6x_nx_{n-1} + x_{n-1}^2 = 1, \quad n \geq 1$$

$$\frac{(x_{n+1} - x_{n-1})(x_{n+1} - 6x_n + x_{n-1}) = 0, \quad n \geq 1}{}$$

Din relația de recurență:  $x_0 = 0$ ,  $x_1 = 1$  rezultă  $x_n > 0$  pentru orice  $n \geq 1$  și atunci  $x_{n+1} > x_n > x_{n-1}$ , deci din ultima relație rezultă relația de recurență liniară:

$$x_{n+1} = 6x_n - x_{n-1}, \quad n \geq 1.$$

- Prin inducție din  $x_0 \in \mathbb{N}$ ,  $x_1 \in \mathbb{N}$  rezultă  $x_n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ .
- Avem  $x_{n+1} + x_{n-1} = 6x_n$ , deci  $x_{n+1} + x_{n-1}$  se divide cu 6.

Din  $x_0 = 0$  rezultă  $x_2 = 6$ , ( $x_2 = 6$ ).

Din  $x_1 = 1$  și  $x_3 = 35 = (-1) \pmod{6}$  rezultă  $x_5 = 1 \pmod{6}$ ,  $x_7 = -1 \pmod{6}$ ,  $\dots$ ,  $x_{4k+1} = 1 \pmod{6}$  și  $x_{4k+3} = -1 \pmod{6}$ .

Mulțimea  $\{n \in \mathbb{N} \mid (x_n + 1) \text{ divide } 6\} = \{4k + 3 \mid k \in \mathbb{N}\}$ .

## Clasa a XI-a

Fie  $M = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$  mulțimea vârfurilor unui poligon regulat.

a) Să se determine numărul triunghiurilor isoscele care se pot forma cu vârfuri din  $M$ .

b) Să se determine numărul minim de vârfuri care trebuie eliminate din mulțimea  $M$  astfel ca să nu se poată forma triunghiuri echilaterale cu vârfurile rămase.

Vasile Pop

**Soluție.** a) Numărăm toate triunghiurile isoscele  $BA_1C$  cu  $A_1B = A_1C$ , cu vârful în  $A_1$ . Bisectoarea unghiului  $\widehat{BA_1C}$  este diametru pentru cercul circumscris poligonului și în același timp axă de simetrie. Punctul  $B$  îl putem alege în  $\left[\frac{n-1}{2}\right]$

moduri și implicit și simetricul său  $C$ . Din cele  $\left[\frac{n-1}{2}\right]$  triunghiuri, în cazul  $n$  divizibil cu 3 trebuie să eliminăm triunghiul echilateral cu vârful  $A_1$ . Obținem în total  $n \cdot \left[\frac{n-1}{2}\right]$  triunghiuri isoscele dacă  $n$  nu se divide cu 3 și  $n \cdot \left[\frac{n-1}{2}\right] - n = n \cdot \left[\frac{n-3}{2}\right]$  triunghiuri isoscele (neechilaterale) dacă  $n$  se divide cu 3.

b) Dacă  $n$  nu se divide cu 3 atunci nu se pot forma triunghiuri echilaterale, dacă nu trebuie eliminat niciun punct.

Dacă  $n = 3k$  partiționăm poligonul în  $k$  triunghiuri echilaterale  $\triangle A_1A_{k+1}A_{2k+1}$ ,  $\triangle A_2A_{k+2}A_{2k+2}, \dots, \triangle A_kA_{2k}A_{3k}$  și trebuie să eliminăm cel puțin câte un vârf din fiecare, deci  $k = \frac{n}{3}$  vârfuri. Dacă eliminăm vârfurile  $A_1, A_2, \dots, A_k$  nu se mai pot forma triunghiuri echilaterale.

## Clasa a IX-a

Să se determine numerele naturale  $n$  pentru care mulțimea  $A_n = \{1, 2, \dots, n\}$  conține exact 10 numere care sunt multipli de 2 sau de 5 dar nu sunt multipli de 3.

Vasile Pop

**Soluție.** Arătăm că singurul număr este  $n = 25$ . Pentru  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$  notăm cu  $M_k$  numărul multiplilor de  $k$ , deci  $M_k = \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor$ . Numărul multiplilor de 2 sau de 5 este  $M_2 + M_5 - M_{10}$ . Trebuie eliminate numerele care sunt multipli de 3 deci de  $2 \cdot 3 = 6$  sau de  $5 \cdot 3 = 15$ , numărul lor este  $M_6 + M_{15} - M_{30}$ . Astfel obținem condiția

$$10 = M_2 + M_5 - M_{10} - M_6 - M_{15} + M_{30}$$

sau

$$\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{30} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{6} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{10} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{15} \right\rfloor = 10$$

Fie  $n = 30k + p$  cu  $k \in \mathbb{N}$  și  $p \in \{0, 1, \dots, 29\}$ . Ecuația devine

$$12k + \left( \left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{p}{6} \right\rfloor \right) + \left( \left\lfloor \frac{p}{5} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{p}{10} \right\rfloor \right) - \left\lfloor \frac{p}{5} \right\rfloor = 10.$$

Deoarece  $\left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{p}{6} \right\rfloor \geq 0$ ,  $\left\lfloor \frac{p}{5} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{p}{10} \right\rfloor \geq 0$  și  $\left\lfloor \frac{p}{5} \right\rfloor \in \{0, 1\}$  rezultă  $10 \geq 12k - 1 \Leftrightarrow k \leq \frac{11}{12}$  deci  $k = 0$  și rămâne că  $n \in \{0, 1, \dots, 29\}$ .

Să observăm că dacă notăm cu  $a_n$  numărul multiplilor de 2 sau 5 din  $A_n$ , care nu sunt multipli de 3, atunci  $a_{n+1} \geq a_n$  și avem de găsit  $n$  pentru care  $a_n = 10$ .

Fie  $\left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor = \frac{p}{2} - \alpha_1$ ,  $\left\lfloor \frac{p}{5} \right\rfloor = \frac{p}{5} - \alpha_2$ ,  $\left\lfloor \frac{p}{6} \right\rfloor = \frac{p}{6} - \alpha_3$ ,  $\left\lfloor \frac{p}{10} \right\rfloor = \frac{p}{10} - \alpha_4$ ,  $\left\lfloor \frac{p}{15} \right\rfloor = \frac{p}{15} - \alpha_5$  cu  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5 \in [0, 1]$  și obținem:

$$\frac{p}{2} + \frac{p}{5} + \frac{p}{6} - \frac{p}{10} - \frac{p}{15} = 10 + \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_4 - \alpha_5 > 7 \Leftrightarrow \frac{11p}{30} > 7 \Rightarrow p > \frac{210}{11},$$

deci  $p \geq 20$ .

Pentru  $p = 20$  calculăm:

$$\begin{aligned} E &= \left\lfloor \frac{20}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{20}{5} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{20}{6} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{20}{10} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{20}{15} \right\rfloor = x_1 + x_2 - x_3 - x_4 - x_5 \\ &= 10 + 4 - 3 - 2 - 1 = 8 < 10 \end{aligned}$$

Pentru  $p = 21$  nu se schimbă nimic. Pentru  $p = 22$  se schimbă doar  $x_1 \mapsto x_1 + 1$  și  $E = 9 < 10$ .

Pentru  $p = 23$  nu se schimbă nimic.

Pentru  $p = 24$  se schimbă  $x_1 \mapsto x_1 + 2$ ,  $x_3 \mapsto x_3 + 1$  și  $E = 9 < 10$ .

Pentru  $p = 25$  se schimbă  $x_1 \mapsto x_1 + 2$ ,  $x_2 \mapsto x_2 + 1$ ,  $x_3 \mapsto x_3 + 1$  și  $e = 10$ .

Pentru  $p = 26$  obținem  $E = 11 > 10$ , am depășit deja 10. Unica soluție este  $n = 25$ .

## Clasa a IX-a

Fie  $O, A, B, C$  patru puncte în plan astfel ca distanțele dintre oricare două să fie numere raționale.

Să se arate că există numere raționale  $a, b, c$  astfel ca

$$a \cdot \overline{OA} + b \cdot \overline{OB} + c \cdot \overline{OC} = \overline{0}.$$

Vasile Pop

**Soluție.** Dacă vectorii  $\overline{OA}$  și  $\overline{OB}$  sunt coliniari, atunci

$$OB \cdot \overline{OA} \pm OA \cdot \overline{OB} = \overline{0}$$

și luăm  $a = OB, b = OA, c = 0$ .

Dacă vectorii  $\overline{OA}$  și  $\overline{OB}$  sunt necoliniari atunci există numerele reale  $a$  și  $b$  astfel ca

$$\overline{OC} = a \cdot \overline{OA} + b \cdot \overline{OB}.$$

Arătăm că  $a$  și  $b$  sunt raționale. Avem:

$$S : \begin{cases} \overline{OC} \cdot \overline{OA} = a \cdot OA^2 + b(\overline{OA} \cdot \overline{OB}) \\ \overline{OC} \cdot \overline{OB} = a(\overline{OA} \cdot \overline{OB}) + b \cdot OB^2 \end{cases}$$

Dar

$$AB^2 = \overline{AB} \cdot \overline{AB} = (\overline{OB} - \overline{OA})^2 = OB^2 + OA^2 - 2\overline{OA} \cdot \overline{OB}$$

și din ipoteză rezultă  $\overline{OA} \cdot \overline{OB} \in \mathbb{Q}$  și analog  $\overline{OC} \cdot \overline{OA} \in \mathbb{Q}$  și  $\overline{OC} \cdot \overline{OB} \in \mathbb{Q}$ .

Sistemul  $S$  are coeficienți raționali ( $a, b$  sunt necunoscute) și obținem (prin diverse metode)

$$a = \frac{(\overline{OA} \cdot \overline{OB})(\overline{OC} \cdot \overline{OB}) - OB^2(\overline{OC} \cdot \overline{OA})}{(\overline{OA} \cdot \overline{OB})^2 - OA^2 \cdot OB^2} \in \mathbb{Q}$$

$$b = \frac{(\overline{OA} \cdot \overline{OB})(\overline{OC} \cdot \overline{OB}) - OA^2(\overline{OC} \cdot \overline{OB})}{(\overline{OA} \cdot \overline{OB})^2 - OA^2 \cdot OB^2} \in \mathbb{Q}$$

(numitorul este nenul deoarece vectorii  $\overline{OA}$  și  $\overline{OB}$  fiind necoliniari avem  $|\overline{OA} \cdot \overline{OB}| < \|\overline{OA}\| \cdot \|\overline{OB}\| \Leftrightarrow (\overline{OA} \cdot \overline{OB})^2 - OA^2 \cdot OB^2 < 0$ ).

## Clasa a X-a

Fie  $a, b, c, x, y, z$  numere pozitive care verifică relațiile:

$$a = cy + bz, \quad b = az + cx, \quad c = bx + ay.$$

Să se arate că  $1 \leq x + y + z \leq \frac{3}{2}$ .

Vasile Pop

**Soluție.** Înmulțim prima relație cu  $a$ , a doua cu  $b$  și a treia cu  $-c$  și le adunăm. Obținem  $2bcx = a^2 + b^2 - c^2$ , deci

$$x = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2bc}$$

și analog prin simetrie:

$$y = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$
$$z = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ac}$$

Din  $x > 0$ ,  $y > 0$ ,  $z > 0$  rezultă că  $a, b, c$  sunt laturile unui triunghi ascuțitunghic ( $a^2 + b^2 > c^2 \Rightarrow a + b > c$ ) și  $x = \cos C$ ,  $y = \cos A$ ,  $z = \cos B$ .

Avem de arătat că

$$\cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2} \Leftrightarrow \cos A + \cos B - \cos(A + B) \leq \frac{3}{2} \Leftrightarrow$$

$$2 \cos \frac{A + B}{2} \cdot \cos \frac{A - B}{2} - 2 \cos^2 \frac{A + B}{2} + 1 \leq \frac{3}{2} \Leftrightarrow$$

$$2 \cos^2 \frac{A + B}{2} - 2 \cos \frac{A + B}{2} \cdot \cos \frac{A - B}{2} + \frac{1}{2} \geq 0.$$

Notând  $u = \cos \frac{A + B}{2}$  avem de arătat că

$$2u^2 - 2u \cos \frac{A - B}{2} + \frac{1}{2} \geq 0.$$

Funcția de gradul II  $f(u) = 2u^2 - 2u \cos \frac{A - B}{2} + \frac{1}{2}$  cu discriminantul  $\Delta = 4 \left( \cos^2 \frac{A - B}{2} - 1 \right) \leq 0$ , deci păstrează semn constant pe  $\mathbb{R}$ , rezultă  $f(u) \geq 0$ ,

$u \in \mathbb{R}$  și în particular  $f \left( \cos \frac{A + B}{2} \right) \geq 0$ .

Pentru inegalitatea  $x + y + z \geq 1$  obținem

$$\cos \frac{A + B}{2} \left( \cos \frac{A - B}{2} - \cos \frac{A + B}{2} \right) \geq 0 \Leftrightarrow \cos \frac{A + B}{2} \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \geq 0,$$

care este adevărată căci  $\frac{A + B}{2} \leq 90^\circ$ .

## Clasa a X-a

Să se arate că numerele reale distincte  $a_1, a_2, \dots, a_n$  sunt în progresie aritmetică dacă și numai dacă mulțimea  $D = \{a_i - a_j \mid i, j = \overline{1, n}\}$  are  $2n - 1$  elemente.

Vasile Pop

**Soluție.** Dacă  $a_1, a_2, \dots, a_n$  sunt în progresie aritmetică atunci  $D = \{(i - j)r \mid i, j = \overline{1, n}\}$ , unde  $r \neq 0$  este rația progresiei. Mulțimea  $B = \{i - j \mid i, j = \overline{1, n}\}$  este  $B = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm(n - 1)\}$  și  $|B| = |D| = 2n - 1$ .

Reciproc: fie  $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ .

Vom arăta că numerele pozitive din  $D$  aranjate în tabelul

$$\begin{array}{r} a_2 - a_1, a_3 - a_2, a_4 - a_3, \dots, a_n - a_{n-1} \\ a_3 - a_1, a_4 - a_2, a_5 - a_3, \dots, a_n - a_{n-2} \\ a_4 - a_1, a_5 - a_2, \dots, a_n - a_{n-3} \\ \dots\dots\dots \\ a_{n-1} - a_1, a_n - a_2 \\ a_n - a_1 \end{array} \begin{array}{l} (n - 1) \\ (n - 2) \\ (n - 3) \\ (1) \\ (2) \\ (1) \end{array}$$

sunt egale pe fiecare linie, ceea ce implică faptul că  $a_1, a_2, \dots, a_n$  sunt în progresie aritmetică.

Numerele  $0 = a_1 - a_1, \pm(a_2 - a_1), \pm(a_3 - a_1), \dots, \pm(a_n - a_1)$  sunt din  $D$ , distincte în număr de  $(2n - 1)$ . Notând  $d_1 = a_2 - a_1, d_3 = a_3 - a_2, \dots, d_{n-1} = a_n - a_1$ , din ipoteză rezultă că pentru orice  $i > j$  numărul  $a_i - a_j \in \{d_1, d_2, \dots, d_{n-1}\}$ .

Avem:

$$\begin{array}{l} 0 < a_3 - a_2 < a_3 - a_1 = d_2 \Rightarrow a_3 - a_2 = d_1 \\ d_1 = a_3 - a_2 < a_4 - a_2 < a_4 - a_1 = d_3 \Rightarrow a_4 - a_2 = d_2 \\ d_2 = a_4 - a_2 < a_5 - a_2 < a_5 - a_1 = d_4 \Rightarrow a_5 - a_2 = d_3 \\ \dots\dots\dots \\ d_{n-3} = a_{n-1} - a_2 < a_n - a_2 < a_n - a_1 = d_{n-1} \Rightarrow a_n - a_2 = d_{n-2} \end{array}$$

Am terminat coloana 2 și începem cu coloana 3.

$$\begin{array}{l} 0 < a_4 - a_3 < a_4 - a_2 = d_2 \Rightarrow a_4 - a_3 = d_1 \\ d_1 = a_4 - a_3 < a_5 - a_3 < a_5 - a_2 = d_3 \Rightarrow a_5 - a_3 = d_2 \\ d_2 = a_5 - a_3 < a_6 - a_3 < a_6 - a_2 = d_4 \Rightarrow a_6 - a_3 = d_3 \\ \dots\dots\dots \\ a_n - a_3 = d_{n-3} \end{array}$$

Se continuă inductiv acest algoritm, care se termină cu  $a_n - a_{n-1} = d_1$ .

## Clasa a X-a

Fie  $m, n$  numere naturale și  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  o mulțime de numere întregi. Să se arate că:

a) Dacă  $1 \leq m \leq n$  atunci există indici distincți  $i_1, i_2, \dots, i_k \in \{1, 2, \dots, n\}$  astfel ca suma  $a_{i_1} + a_{i_2} + \dots + a_{i_k}$  să se dividă cu  $m$ .

b) Dacă  $n < m < 2^n$  atunci există indici distincți  $i_1, i_2, \dots, i_k \in \{1, 2, \dots, n\}$  și o alegere a semnelor  $+$  și  $-$  astfel ca numărul  $\pm a_{i_1} \pm a_{i_2} \pm \dots \pm a_{i_k}$  să fie divizibil cu  $m$ .

Vasile Pop

**Soluție.** a) Considerăm sumele  $s_1 = a_1, s_2 = a_1 + a_2, \dots, s_m = a_1 + a_2 + \dots + a_m$ . Dacă o sumă este divizibilă cu  $m$  am terminat. Dacă nu, atunci există două sume  $s_i, s_j, i < j$  egale modulo  $m$ , deci  $s_j - s_i$  se divide cu  $m \Leftrightarrow a_{i+1} + \dots + a_j$  se divide cu  $m$ .

b) Notăm cu  $A_1, A_2, \dots, A_{2^n-1}$  submulțimile nevide ale mulțimii  $A$  și cu  $s_1, s_2, \dots, s_{2^n-1}$  sumele elementelor lor. Deoarece  $m \leq 2^n - 1$  una din sume se divide cu  $m$  (caz în care am terminat) sau există două sume egale modulo  $m$ ,

$$s_i = s_j \pmod{m}.$$

Dacă eliminăm din mulțimile  $A_i$  și  $A_j$  elementele comune, rămân două mulțimi disjuncte  $A_k$  și  $A_p$  astfel ca

$$S_k = S_p \pmod{m} \Leftrightarrow \sum_{a \in A_k} a + \sum_{b \in A_p} (-b) = 0 \pmod{m}.$$

## Clasa a XI-a

Să se determine numărul elementelor mulțimii:

$$A = \{(a_1, a_2, \dots, a_{10}) \mid 1 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_{10} \leq 101 \text{ și } a_{i+1} - a_i \geq 10, i = \overline{1, 9}\}.$$

Vasile Pop

**Soluție.** Dacă  $(a_1, a_2, \dots, a_{10}) \in A$  atunci definim  $b_1 = a_1, b_2 = a_2 - 9, b_3 = a_3 - 2 \cdot 9, \dots, b_{10} = a_{10} - 9 \cdot 9$  și atunci

$$(b_1, b_2, \dots, b_{10}) \in B = \{(b_1, b_2, \dots, b_{10}) \mid 1 \leq b_1 < b_2 < \dots < b_{10} \leq 20 = 101 - 81\}$$

Reciproc: Dacă  $(b_1, b_2, \dots, b_{10}) \in B$  atunci  $(a_1, a_2, \dots, a_{10}) \in A$ , unde  $a_1 = b_1, a_2 = b_2 + 9, a_3 = b_3 + 2 \cdot 9, \dots, a_{10} = b_{10} + 9 \cdot 9$ . Mulțimile  $A$  și  $B$  au același număr de elemente. Un element din  $B$  se alege luând 10 elemente distincte din mulțimea  $\{1, 2, \dots, 20\}$ , ceea ce se poate face în  $C_{20}^{10}$  moduri, deci  $|A| = C_{20}^{10}$ .

## Clasa a XI-a

Fie  $a, b$  numere reale pozitive. Definim șirul  $(x_n)_n$  prin relația de recurență

$$x_{n+1} = (a + b)x_n - abx_{n-1}, \quad n \geq 1, \text{ cu } x_0 = 1 \text{ și } x_1 \in \mathbb{R} \setminus \{a, b\}.$$

Să se arate că șirul  $(x_n)_n$  conține o progresie aritmetică infinită dacă și numai dacă  $a = b = 1$ .

Vasile Pop

**Soluție.** Dacă  $a \neq b$  atunci  $x_n$  are forma:

$$x_n = A \cdot a^n + B \cdot b^n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Din  $x_0 = 1$  și  $a \neq b$  obținem

$$x_n = \frac{1}{a - b} [x_1(a^n - b^n) - ab(a^{n-1} - b^{n-1})], \quad n \in \mathbb{N}.$$

Putem considera  $a < b$ .

Dacă șirul  $(x_n)_n$  conține o progresie aritmetică infinită  $y_k = x_{n_k}$ ,  $y_k = y_0 + kr$ ,  $r \neq 0$ , atunci șirul  $(x_n)_n$  este nemărginit, deci  $b > 1$ .

Pentru  $b > 1$  se arată ușor că  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_{n+1} - x_n) = +\infty$  sau  $-\infty$ , în particular există  $N \in \mathbb{N}$  astfel ca  $|x_{n+1} - x_n| > 2|r|$  pentru  $n > N$  și atunci există intervale de lungime  $2|r|$  în care nu se găsesc termeni din șir, deci nici termeni din progresia  $(y_k)_k$ , contradicție.

Dacă  $a = b$  atunci  $x_n = A \cdot a^n + B \cdot n \cdot a^{n-1}$  și din  $x_0 = 1 = A$  și  $x_1 = A \cdot a + B$  rezultă

$$x_n = a^n + (x_1 - a) \cdot n \cdot a^{n-1}.$$

Cu același argument șirul  $(x_n)_n$  trebuie să fie nemărginit, deci  $a \geq 1$ .

Dacă  $a > 1$  atunci la fel  $\lim (x_{n+1} - x_n) = +\infty$  sau  $-\infty$ , deci nu conține progresii infinite.

Dacă  $a = 1$  atunci  $x_n = 1 + (x_1 - 1) \cdot n$ , care este o progresie aritmetică infinită de rație  $r = x_1 - 1 \neq 0$  ( $x_1 \neq a \Rightarrow x_1 \neq 1$ ).

## Clasa a XI-a

Fie  $P$  un polinom de grad  $n \geq 2$  cu proprietatea

$$P(k) = k \cdot 2^{k-1}, \text{ pentru orice } k \in \{0, 1, \dots, n\}.$$

a) Să se arate că:

$$C_k^1 + 2C_k^2 + \dots + kC_k^k = k \cdot 2^{k-1}.$$

b) Să se determine  $P(n+1)$ .

Vasile Pop

**Soluție.** a) Avem relația  $iC_k^i = kC_{k-1}^{i-1}$  și atunci

$$\sum_{i=1}^k iC_k^i = k \sum_{i=1}^k C_{k-1}^{i-1} = k \cdot 2^{k-1}.$$

b) Exprimăm  $C_x^p$  ca polinom în  $x$ :

$$C_x^p = \frac{x(x-1)\dots(x-p+1)}{p!}$$

și atunci polinomul

$$\begin{aligned} Q(x) &= C_x^1 + 2C_x^2 + \dots + nC_x^n \\ &= \frac{x}{1!} + 2 \cdot \frac{x(x-1)}{2!} + 3 \cdot \frac{x(x-1)(x-2)}{3!} + \dots + n \cdot \frac{x(x-1)\dots(x-n+1)}{n!} \end{aligned}$$

are gradul  $n$  și

$$Q(k) = C_k^1 + 2C_k^2 + \dots + kC_k^k + 0 = k \cdot 2^{k-1}$$

deci  $Q(k) = P(k)$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$ .

$P$  și  $Q$  fiind egale în mai mult de  $n$  numere rezultă că sunt identice, deci  $P = Q$  și atunci

$$\begin{aligned} P(n+1) &= Q(n+1) = C_{n+1}^1 + 2C_{n+1}^2 + \dots + nC_{n+1}^n \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} C_{n+1}^i - (n+1)C_{n+1}^{n+1} \stackrel{a)}{=} (n+1) \cdot 2^n - (n+1) = (n+1)(2^n - 1). \end{aligned}$$

## Clasa a XI-a

Să se arate că singura permutare  $\sigma$  a mulțimii  $\{1, 2, \dots, n\}$  care are proprietatea  $1 + \sigma(1) < 2 + \sigma(2) < \dots < n + \sigma(n)$  este permutarea identică.

### Soluție.

Vom arăta că  $\sigma(n) = n$  și prin inducție va rezulta  $\sigma(k) = k$ ,  $k = \overline{1, n}$ . Dacă prin absurd  $\sigma(n) \neq n$ , atunci există  $k < n$  astfel ca  $\sigma(k) = n$ . Avem  $k + \sigma(k) < (k + 1) + \sigma(k + 1) \Leftrightarrow \sigma(k + 1) \geq n$ , dei  $\sigma(k + 1) = n$ , contradicție cu  $\sigma(k) = n$ .

## Clasa a XII-a

Pentru  $a \in \mathbb{R}$  considerăm matricea  $X_a = \begin{bmatrix} a & 1 \\ -1 & a \end{bmatrix}$  și notăm

$$(X_a)^n = \begin{bmatrix} a_n & b_n \\ -b_n & a_n \end{bmatrix}, \quad n \geq 1.$$

Să se arate că există  $a \in \mathbb{R}$  pentru care  $b_1 < a_1$ ,  $b_2 < a_2, \dots, b_{2009} < a_{2009}$  și  $b_{2010} > a_{2010}$ .

Vasile Pop

**Soluție.** Scriem pe  $X_a$  sub forma

$$X_a = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix}$$

unde  $t \in [0, 2\pi]$  astfel ca  $\cos t = \frac{a}{\sqrt{a^2+1}}$ ,  $\sin t = \frac{1}{\sqrt{a^2+1}}$ .

Avem

$$(X_a)^n = \frac{1}{(\sqrt{1+a^2})^n} \begin{bmatrix} \cos nt & \sin nt \\ -\sin nt & \cos nt \end{bmatrix}$$

și condițiile devin  $\cos nt > \sin nt$ , pentru  $n = 1, 2, \dots, 2009$  și  $\cos 2010t < \sin 2010t$ .

Alegem  $t > 0$  astfel ca  $2009t < \frac{\pi}{4}$  și  $2010t > \frac{\pi}{4}$ , adică  $t \in \left( \frac{\pi}{4 \cdot 2010}, \frac{\pi}{4 \cdot 2009} \right)$ , de exemplu luăm  $t = \frac{\pi}{8038}$ . Dacă notăm cu  $b = \sin^2 \frac{\pi}{8038}$ , din relația  $\frac{1}{\sqrt{1+a^2}} = \sin t$

rezultă  $a = \sqrt{\frac{1-b}{b}}$  este una din valorile lui  $a$  pentru care se verifică inegalitățile cerute.

## Clasa a XII-a

Fie  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție și  $(a_n)_n$  un șir de numere reale care verifică relația de recurență  $a_{n+1} = f(a_n, a_{n-1}), \forall n \geq 1$ . Să se arate că dacă mulțimea

$$A = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

este finită atunci există două polinoame  $P, Q \in \mathbb{R}[X]$  și există

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n) = \frac{P(x)}{Q(x)}, \forall x \in (-1, 1).$$

Pop Vasile

**Soluție.** Deoarece mulțimea  $A$  este finită și mulțimea  $B = \{(a_n, a_{n-1}) \mid n \geq 1\}$  este finită. Există  $m, n \in \mathbb{N}, m \neq n$  astfel ca  $(a_n, a_{n-1}) = (a_m, a_{m-1})$ . Dacă  $n = m+p$  atunci din relația de recurență obținem:  $a_{q+p} = a_q, \forall q \geq m$ , deci șirul  $(a_n)_n$  este periodic de perioadă  $p$  de la rangul  $m$ .

Notăm  $S_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$  și avem:

$$\begin{aligned} S_{m+kp}(x) &= S_m(x) + x^m R(x) + x^{m+p} R(x) + \dots + x^{m+(k-1)p} R(x) \\ &= S_m(x) + x^m \cdot \frac{1 - x^{kp}}{1 - x^p} \end{aligned}$$

unde

$$R(x) = a_{m+1}x + a_{m+2}x^2 + \dots + a_{m+p}x^p.$$

Trecând la limită cu  $k \rightarrow \infty$  obținem

$$\lim_{k \rightarrow \infty} S_{m+kp}(x) = S_m(x) + \frac{x^m}{1 - x^p} = \frac{P(x)}{Q(x)}, \forall x \in (-1, 1)$$

unde  $P, Q \in \mathbb{R}[x]$ .

Pentru numerele  $n$  care nu sunt de forma  $m + kp, k \in \mathbb{N}$  mai rămân în  $S_n(x)$  un număr finit de termeni  $a_{m+kp+1}x^{m+kp+1} + \dots + a_{m+kp+i}x^{m+kp+i}$ , și când  $k \rightarrow \infty$  fiecare termen tinde la zero ( $\lim_{k \rightarrow \infty} x^{m+kp+i} = 0, \forall x \in (-1, 1)$ ).

## Clasa a XII-a

Se consideră funcțiile  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , derivabilă și  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de două ori derivabilă cu proprietățile:

$$\begin{aligned} f'(x) - 2f(x) &\geq 0, \quad \forall x \geq 0, \quad f(0) = 1, \\ g''(x) - 3g'(x) + 2g(x) &\geq 0, \quad \forall x \geq 0, \quad g(0) = 0, \quad g'(0) = 1. \end{aligned}$$

Să se arate că:

- a)  $f(x) \geq e^{2x}, \quad \forall x \geq 0;$
- b)  $g(x) \geq e^{2x} - e^x, \quad \forall x \geq 0.$

Vasile Pop

**Soluție.** a) În relația  $f'(x) - 2f(x) \geq 0$  înmulțim cu  $e^{-2x}$  și obținem

$$(f(x)e^{-2x})' \geq 0, \quad \forall x \geq 0,$$

deci funcția  $f(x)e^{-2x}$  este crescătoare pe  $[0, \infty)$  și atunci

$$f(x)e^{-2x} \geq f(0) \Leftrightarrow f(x) \geq e^{2x}, \quad \forall x \geq 0.$$

b) Scriem a doua relație sub forma

$$(g'(x) - g(x))' - 2(g'(x) - g(x)) \geq 0, \quad \forall x \geq 0.$$

Notăm  $h(x) = g'(x) - g(x)$  și verifică condițiile

$$h'(x) - 2h(x) \geq 0, \quad \forall x \geq 0, \quad h(0) = g'(0) - g(0) = 1.$$

Din a) rezultă  $h(x) \geq e^{2x}, \quad \forall x \geq 0 \Leftrightarrow$

$$g'(x) - g(x) \geq e^{2x}, \quad \forall x \geq 0.$$

În ultima inegalitate înmulțim cu  $e^{-x}$  și obținem:

$$(g(x)e^{-x} - e^x)' \geq 0, \quad \forall x \geq 0.$$

Funcția  $g(x)e^{-x} - e^x$  este crescătoare pe  $[0, \infty)$  și atunci

$$g(x)e^{-x} - e^x \geq g(0) - 1 = -1, \quad \forall x \geq 0.$$

Obținem  $g(x) \geq -e^x + e^{2x}, \quad \forall x \geq 0.$

## Clasa a XII-a

Fie  $A$  o matrice de ordin  $2n$ ,  $n \geq 1$  cu elementele numere naturale și cu proprietatea:

(P): pentru orice două linii  $L_i, L_j$  cu  $i \neq j$ , suma lor  $L_i + L_j$  conține  $n$  elemente numere pare și  $n$  elemente numere impare.

a) Să se arate că pentru orice două coloane  $C_i$  și  $C_j$  cu  $i \neq j$ , suma lor  $C_i + C_j$  conține  $n$  elemente numere pare și  $n$  elemente numere impare.

b) Să se arate că pentru orice  $k \geq 1$  există matrice de ordin  $2^k$  cu proprietatea (P).

Vasile Pop

**Soluție.** a) Asociem matricei  $A = [a_{ij}]$ , matricea  $B = [b_{ij}]$  în care  $b_{ij} = 1$  dacă  $a_{ij}$  este număr par și  $b_{ij} = -1$  dacă  $a_{ij}$  este număr impar ( $b_{ij} = (-1)^{a_{ij}}$ ).

Observăm că matricea  $A$  are proprietatea (P) dacă și numai dacă produsul oricăror două linii  $L'_i$  și  $L'_j$  din matricea  $B$  conține  $n$  de 1 și  $n$  de  $-1$ , adică

$\sum_{k=1}^{2n} b_{ik}b_{jk} = 0$ . Deoarece  $\sum_{k=1}^{2n} (b_{ik})^2 = 2n, \forall i = \overline{1, 2n}$  rezultă că  $A$  are proprietatea (P)

dacă și numai dacă  $B \cdot B^t = 2n \cdot I_{2n}$ . Evident avem și  $B^t \cdot B = 2n \cdot I_{2n}$ , relație care reinterpretează aceleași condiții asupra coloanelor matricei  $B$ , respectiv asupra coloanelor matricei  $A$ .

b) Defnim

$$B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{și} \quad B_{2^{k+1}} = \left[ \begin{array}{c|c} B_{2^k} & B_{2^k} \\ \hline -B_{2^k} & B_{2^k} \end{array} \right], \quad \forall k \geq 1,$$

respectiv

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{și} \quad A_{2^{k+1}} = \left[ \begin{array}{c|c} A_{2^k} & A_{2^k} \\ \hline A_{2^k} & A_{2^k} \end{array} \right], \quad \forall k \geq 1,$$

unde  $\overline{[a_{ij}]} = [\overline{a_{ij}}]$  și  $\overline{1} = 0, \overline{0} = 1$ .

**Observație.** Se poate pune problema: care sunt numerele naturale  $n$  pentru care există  $A$  de dimensiune  $2n$  cu proprietatea (P). Nu știu răspunsul dar cred că sunt numai numerele de forma  $n = 2^k, k \in \mathbb{N}$ .